МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Теории функций и геометрии

_____ *Семенов Е.М.*
25.05.2023 г

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.03.01 Математические модели гидродинамики

1. Код и наименование специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель.

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра теории функций и геометрии

6. Составители программы: Стенюхин Леонид Витальевич, к. ф.-м. н., доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023 г.

---

8. Учебный год: 2026 - 2027 **Семестр:** 7

9. **Цели и задачи учебной дисциплины:**

Знать основные принципы и владеть основными методами гидродинамики, моделировать и уметь решать задачи гидродинамики.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Математические модели гидродинамики относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. и является дисциплиной по выбору. Для ее успешного освоения требуется знать основы математического анализа, комплексного анализа, дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1.	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики.	ПК-1.3.	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике.	Знать: - современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций. Уметь: - разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования. Владеть навыками: - практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике с привлечением методов, в том числе, математических моделей гидродинамики.
ПК-2.	Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПК-2.1.	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций.	Знать: - современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций. Уметь: - разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования.
		ПК-2.2.	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе	

			пакетов прикладных программ моделирования	Владеть навыками: -проведения научно-исследовательской деятельности в области решения задач аналитического характера.
ПК-3.	Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПК-3.1.	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Знать: - современные методы разработки и реализации математических моделей. Уметь: - строить модели и оптимальные решения теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии. Владеть навыками: - построения моделей прикладных процессов; - навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач.
		ПК-3.2.	Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации - зачёт.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	…
Аудиторные занятия	32	7		
в том числе: лекции	16	7		
практические	16	7		
лабораторные				
Самостоятельная работа	76	7		
Форма промежуточной аттестации *(зачет)*	0	7		
Итого:	108	7		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
		1. Лекции
1.1	Кинематика жидкой среды	1. Гипотеза сплошности жидкой среды, переменные Лагранжа и Эйлера. Элементы теории поля. Поле скоростей. 2. Уравнение неразрывности. Потенциальное и вихревое движения.
1.2	Динамика идеальной жидкости	1. Общее уравнение движения жидкого объёма. 2. Уравнения Эйлера.

		3. Модели жидких идеальных сред. 4. Плоское потенциальное движение.
1.3	Механика вязкой жидкости	1. Понятие вязкой жидкости, Тензор напряжений. Связь между компонентами тензоров скоростей деформации и напряжений. 2. Уравнения Навье-Стокса. 3. Модели жидких вязких сред.
2. Практические занятия		
2.1	Кинематика жидкой среды	1. Гипотеза сплошности жидкой среды, переменные Лагранжа и Эйлера. 2. Элементы теории поля. Поле скоростей. 3. Уравнение неразрывности. Потенциальное и вихревое движения.
2.2	Динамика идеальной жидкости	1. Общее уравнение движения жидкого объёма. 2. Уравнения Эйлера. 3. Модели жидких идеальных сред. 4. Плоское потенциальное движение.
2.3	Механика вязкой жидкости	1. Понятие вязкой жидкости, Тензор напряжений. Связь между компонентами тензоров скоростей деформации и напряжений. 2. Уравнения Навье-Стокса. 3. Модели жидких вязких сред.
3. Лабораторные работы		

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Кинематика жидкой среды	4	4		24	32
2.	Динамика идеальной жидкости	6	6		26	38
3.	Механика вязкой жидкости	6	6		26	38
	Итого:	16	16		76	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции и практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

Методические рекомендации студентам к практическим занятиям:

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия помогают студентам глубже усвоить учебный теоретический материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

В начале практического занятия происходит обсуждение темы текущего занятия, рассмотрение примеров и задач, рекомендации по выполнению практической работы. Это возможность для студентов обратить внимание на непонятные моменты и разобрать их. Также преподавателем сообщается рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и

практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 76 часов.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем и учитываются при проведении промежуточной аттестации-зачета.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	*Лекции по гидродинамике / М.А. Давыдова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 216 с.*
2.	*Гидродинамика: учеб. Пособие для студентов нематематических факультетов / А.Б. Мазо, К.А. Поташев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 2-е изд. – 128 с.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	*Гидродинамика / Г. Ламб. - М.- Ижевск: РХД, 2003.*
4.	*Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2001.*
5.	*Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов. - М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Ресурс
6.	*Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета : (http // www.lib.vsu.ru/)*
7.	*Iprbookshop.ru*
8.	*e.lanbook.com*
9.	*book.ru*
10.	*Полнотекстовая база «Университетская библиотека» : образовательный ресурс : <UPL:http://www.biblioclub.ru>.*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	*Лекции по гидродинамике / М.А. Давыдова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 216 с.*
2.	*Гидродинамика: учеб. Пособие для студентов нематематических факультетов / А.Б. Мазо, К.А. Поташев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 2-е изд. – 128 с.*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Важнейшая цель преподавателя – систематизация большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460). При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.liv.vsu.ru и https://e.lanbook.com

---

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используется учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется компьютерной класс (ауд.310), оснащенный специализированной оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ubuntu.com/download/desktop); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицен□зия: https://ru.libreoffice.org/about-us/license/); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.lazarus-ide.org/index.php); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.freepascal.org/faq.html); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицен□зия: https://docs.python.org/3/license.html 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.gimp.org/about/); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://inkscape.org/about/license/); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://miktex.org/copying); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://texstudio.org/); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://maxima.sourceforge.net/faq.html); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://www.denwer.ru/faq/other.html); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://www.foxitsoftware.com/pdf reader/eula.html); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf);

WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://windjview.sourceforge.io/ru/); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.7-zip.org/license.txt); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.mozilla.org/en-US/MPL/); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.vmware.com/download/open_source.html); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.postgresql.org/about/licence/); GeoGebra (бесплат□ное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.geogebra.org/license); R (бесплатное и/или сво□бодное ПО, лицензия: https://www.r-project.org/Licenses/); Wing-101 (бесплатное и/или свобод□ное ПО, лицензия: https://wingware.com/license/wing101); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://loginom.com/platform/pricing); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://downloads.mysql.com/docs/licenses/).

---

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Кинематика жидкой среды.	ПК-1	ПК-1.3	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
2	Динамика идеальной жидкости	ПК-2	ПК-2.1 ПК-2.2	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
3	Механика вязкой жидкости	ПК-3	ПК-3.1 ПК-3.2	Практико-ориентированные задания
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов Практическое задание

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примерный перечень практико-ориентированных заданий

Задача 1. Канал трапецеидального сечения имеет следующие размеры: ширина по дну **b = 3,8 м**, коэффициент заложения откоса **m = 1,5 м**, глубина воды **h = 1,2 м**. Определить режим течения воды в канале при объемном расходе **Q = 5,2 м³/ с**, а также критическую скорость $\boldsymbol{u_{кр}}$ при которой произойдет смена режимов течения.

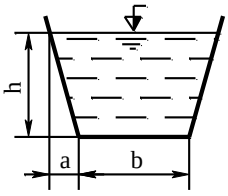


Рис. 19

Решение

Используя (прил. 1, сх. 2, в) определим площадь живого сечения канала:

$$S = (b + m \cdot h)\, h = (38 + 1{,}5 \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = 6{,}72 \ \text{м}^2.$$

Определим смоченный периметр:

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 3{,}8 + 2 \cdot 1{,}2\sqrt{1+1{,}5^2} = 8{,}13 \ \text{м}.$$

Определим гидравлический радиус по формуле (1):

$$R_г = \frac{S}{\chi} = \frac{6{,}72}{8{,}13} = 0{,}83 \ \text{м}.$$

Определим скорость течения жидкости в канале по формуле (5):

$$\upsilon = \frac{Q}{S} = \frac{5{,}2}{6{,}72} = 0{,}72 \ \text{м/с}.$$

Определим число Рейнольдса по формуле (36):

$$Re = \frac{\upsilon \cdot R_г}{\nu} = \frac{0{,}77 \cdot 0{,}83}{0{,}0101 \cdot 10^{-4}} = 632772,$$

где **ν** – кинематический коэффициент вязкости для воды, принимаем по прил. 5, **ν = 0,0101·10^{-4} м^2/с**.

Так как **Re = 632772** > **Re$_{кр}$ = 580**, то движение турбулентное.

Используя формулу (36) определим критическую скорость, при которой произойдет смена режимов течения:

$$\upsilon_{кр} = \frac{Re_{кр} \cdot \nu}{R_г} = \frac{580 \cdot 0{,}0101 \cdot 10^{-4}}{0{,}83} = 0{,}705 \cdot 10^{-3} \ \text{м/с} = 0{,}705 \ \text{мм/с}.$$

Ответ: **режим турбулентный; *u*$_{кр}$ = 0,705 мм/с**.

Задача 2. Из резервуара по горизонтальному трубопроводу диаметром **d = 20 мм** длиной **ℓ = 10 м** вытекает масло марки **АМГ-10** с температурой **t = 20° С**. Определить высоту масла **Н** в резервуаре, если его массовый расход составляет **М = 0,3 кг/с**. Коэффициент Кориолиса принять **α = 1.**

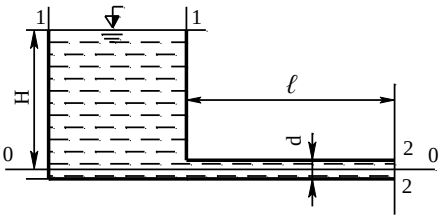


Рис. 20

Решение

Плоскость сравнения **0-0** проведем по оси трубопровода, сечение **1-1** по свободной поверхности масла в резервуаре, сечение **2-2** по струе масла в месте её выхода из трубопровода (рис. 20).

Составим для сечений **1-1** и **2-2** уравнение Бернулли:

$$\frac{\upsilon_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{\upsilon_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + H_{пот\ 1-2}.$$

Так как сечение резервуара значительно больше трубопровода, то скорость течения масла в сечении **1-1** можно принять ***u*$_1$ = 0**, ***u*$_2$ = *u***. Давление в сечениях **1-1** и **2-2** равны **P$_1$ = P$_2$ = P$_{атм}$**. Геометрические высоты **Z$_1$ = H,**
Z$_2$ = 0. Потери на участке от сечения **1** до сечения **2** равны **H$_{пот\ 1-2}$ = h$_{тр}$**.

Перепишем уравнение Бернулли с учетом сказанного выше и получим:

$$\frac{P_{атм}}{\rho g} + H = \frac{\upsilon^2}{2g} + \frac{P_{атм}}{\rho g} + h_{тр},$$

откуда:

$$H = \frac{\upsilon^2}{2g} + h_{тр}.$$

Определим объемный расход масла:

$$Q = \frac{M}{\rho} = \frac{0,3}{850} = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с},$$

где ρ – плотность масла **АМГ-10**, определяем по прил. 5, **ρ = 850 кг/м³**.

Используя уравнение (5) определим среднюю скорость масла в трубе:

$$\upsilon = \frac{Q}{S} = \frac{Q \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{0.35 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{3,14(20 \cdot 10^{-3})^2} = 1,11 \text{ м/с}.$$

Определим число Рейнольдса по формуле (34):

$$Re = \frac{\upsilon \cdot d}{\nu} = \frac{1,11 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,17 \cdot 10^{-4}} = 1306,$$

где **ν** – коэффициент кинематической вязкости масла, определяем по прил. 5, **ν = 0,17·10⁻⁴ м²/с**.

Так как **Re = 1306 < Re$_{кр}$ = 2320**, режим движения ламинарный. Формулу для определения гидравлического сопротивления λ возьмем из табл. 1:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1306} = 0,049 \ .$$

Определим потери напора на трение по длине потока по формуле (38):

$$h_{тр} = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{\upsilon^2}{2g} = 0,049 \frac{10}{20 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1,11^2}{2 \cdot 9,8} = 1,54 \text{ м}.$$

Определим высоту масла в резервуаре, подставив полученные значения в уравнение для **H**, получим:

$$H = \frac{1,11^2}{2 \cdot 9,8} + 1,54 = 1,6 \text{ м}.$$

Ответ: **H = 1,6 м.**

Задача 3. Весовой расход легкой нефти в горизонтальном трубопроводе диаметром **d = 156 мм**, длиной **ℓ = 2000 м** составляет **G = 0,5·10⁶ Н/час**. Определить давление **P₁** на входе в трубопровод, если давление на выходе **P₂ = 15 Н/см²**.

Решение

Используя формулу (3), определим объемный расход нефти в секунду:

$$Q = \frac{G}{\rho g} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{884 \cdot 9,8 \cdot 3600} = 0,016 \text{ м}^3/\text{с},$$

где ρ – плотность легкой нефти, определяем по прил. 5, **ρ = 884 кг/м³**.

По формуле (5) определим среднюю скорость потока в живом сечении:

$$\upsilon = \frac{Q}{S} = \frac{0,016}{0,0191} = 0,837 \text{ м/с}.$$

где **S** – площадь живого сечения потока.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,156^2}{4} = 0,0191 \text{ м}^2.$$

Для определения гидродинамического режима течения, вычислим число Рейнольдса по формуле (39):

$$Re = \frac{\upsilon \cdot d}{\nu} = \frac{0,837 \cdot 0,156}{1,1 \cdot 10^{-4}} = 1187.$$

Так как **Re = 1187 < Re$_{кр}$ = 2320**, следовательно, режим течения в трубопроводе ламинарный.

Определим потери напора на трения по длине трубопровода по формуле (38):

$$h_{тр} = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{\upsilon^2}{2g} = 0,0539 \frac{2000}{0,156} \cdot \frac{0,837^2}{2 \cdot 9,8} = 24,7 \text{ м}.$$

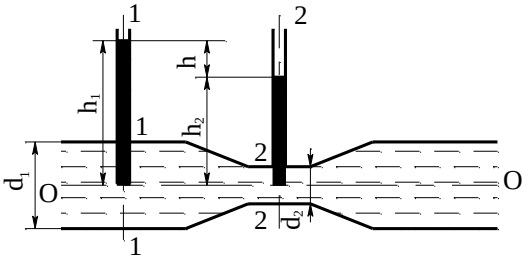


Рис. 21

где λ – коэффициент гидравлического трения определяем по табл. 1, т. к. режим течения ламинарный то:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1187} = 0{,}0539.$$

Составим уравнение Бернулли для начала и конца трубопровода:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + h_{w\ 1-2}.$$

По условию задачи трубопровод горизонтальный и постоянного диаметра, следовательно, $Z_1 = Z_2$, $u_1 = u_2$, $h_{w\ 1\text{-}2} = h_{тр}$. тогда из уравнения Бернулли определим давление на входе в трубопровод:

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_{тр},$$

откуда:

$$P_1 = P_2 + \rho g h_{тр} = 15 \cdot 10^4 + 884 \cdot 9{,}8 \cdot 24{,}7 = 36{,}4\ Н/см^2.$$

Ответ: **P_1 = 36,4 Н/см^2.**

Задача 4. Определить расход воды **Q** в трубе диаметром **d_1 = 250 мм**, имеющей плавное сужение до диаметра **d_2 = 125 мм**, если показания пьезометров: до сужения **h_1 = 50 см**; в сужении **h_2 = 30 см**. Коэффициент расхода **μ = 0,98** (рис. 21).

Решение

Составим уравнение Бернулли для сечений **1-1 и 2-2** приняв за плоскость сравнения ось трубы:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{пот}^{1-2}.$$

Учитывая, что **$z_1 = z_2 = 0$**, пренебрегая в первом приближении потерями напора, т. е. принимая $h_{пот}^{1-2} = 0$, и полагая **$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$**, получим:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Из уравнения неразрывности течения имеем $s_1 u_1 = s_2 u_2$.

Поскольку $s_1 = \pi d_1^2/4;\quad s_2 = \pi d_2^2/4$, то $v_2 = v_1 d_1^2/d_2^2$.

Обозначим:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_1 - h_2 = h,$$

тогда уравнение Бернулли примет вид:

$$h = \frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right),$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{d_1^4/d_2^4 - 1}}.$$

Объемный расход воды в трубе определим по формуле (2):

$$Q = s_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4/d_2^4 - 1}}\ .$$

В действительности расход воды будет меньше вследствие потерь напора, которыми пренебрегли. С учетом этих потерь формула для определения объемного расхода примет вид:

$$Q = \mu\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4/d_2^4 - 1}}\ ,$$

где μ – коэффициент, учитывающий уменьшение расхода вследствие потерь напора:

$$Q = 0{,}98\frac{3{,}14\cdot 0{,}25}{4}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81}{0{,}25^4/0{,}125^4 - 1}} = 0{,}024\ \text{м}^3/\text{с}.$$

Ответ: **Q = 0,024 м³/с.**

Задача 5. Определить общие потери напора h_w в новом стальном трубопроводе, если по нему течет нефть легкая с расходом **Q = 20 л/с**. Трубопровод d_1 **= 200 мм**, длиной ℓ_1 **= 1 км** имеет внезапное сужение до d_2 **= 100 мм**. Суженый участок длиной ℓ_2 **= 1,5 км** имеет два поворота: плавный **d/R = 0,4** и крутой α **= 30°**.

Решение

Общие потери напора складываются из потерь напора на трение и местные потери и определяются по формуле (37):

$$h_w = h_{тр} + h_м.$$

Для определения этих потерь, вычислим площадь сечения трубопровода первого участка:

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3{,}14\cdot(200\cdot 10^{-3})^2}{4} = 0{,}0314\ \text{м}^2.$$

По уравнению (5) определим скорость движения нефти на первом линейном участке:

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{20\cdot 10^{-3}}{0{,}0314} = 0{,}64\ \text{м/с}.$$

Определим число Рейнольдса при транспортировании нефти по формуле (34):

$$Re_1 = \frac{v_1\cdot d_1}{\nu} = \frac{0{,}64\cdot 200\cdot 10^{-3}}{1{,}4\cdot 10^{-4}} = 1163\ ,$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости, определяем по прил. 5, для легкой нефти $\nu = 1{,}1\cdot 10^{-4}$ **м²/с**.

Так как $Re_1 = 1163 < Re_{кр} = 2320$, то режим течения ламинарный.

Коэффициент гидравлического сопротивления определим по формуле Пуайзеля, используя табл. 1:

$$\lambda_1 = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1163} = 0{,}055\ .$$

Определим потери напора на первом линейном участке трубопровода, используя уравнение (38):

$$h_{тр_1} = \lambda_1\frac{\ell_1}{d}\cdot\frac{v_1^2}{2g} = 0{,}055\frac{1000}{200\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{0{,}64^2}{2\cdot 9{,}81} = 5{,}47\ \text{м}.$$

Определим площадь сечения трубопровода второго линейного участка:

$$S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3{,}14\cdot(100\cdot 10^{-3})^2}{4} = 0{,}00785\ \text{м}^2.$$

Определим скорость течения нефти на этом участке:

$$\upsilon_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0{,}00785} = 2{,}55 \text{ м/с}.$$

Определим число Рейнольдса:

$$Re_2 = \frac{\upsilon_2 \cdot d_2}{\nu} = \frac{2{,}5 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1{,}1 \cdot 10^{-4}} = 46364 .$$

Так как **Re_2 = 46364** > **$Re_{кр}$ = 2420**, то режим течения турбулентный.

Число Рейнольдса входит в зону доквадратичного сопротивления $20\frac{d}{\Delta_э} < Re_2 < 500\frac{d}{\Delta_э}$, следовательно коэффициент гидравлического сопротивления определим по формуле Альтшуля, используя табл. 1:

$$\lambda_2 = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{d} + \frac{68}{Re_2}\right)^{0{,}25} = 0{,}11\left(\frac{0{,}07}{100} + \frac{68}{46364}\right)^{0{,}25} \frac{64}{1163} = 0{,}024 ,$$

где $\Delta_э$ – среднее значение эквивалентной шероховатости, определяем по прил. 2, для новых стальных труб **$\Delta_э$ = 0,07 мм**.

Определим потери напора на втором линейном участке трубопровода:

$$h_{тр_2} = \lambda_2 \frac{\ell_2}{d} \cdot \frac{\upsilon_2^2}{2g} = 0{,}024 \frac{2500}{100 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} = 39{,}8 \text{ м}.$$

Определим суммарные потери на трение:

$h_{тр}$ = $h_{тр_1}$ + $h_{тр_2}$ = 5,47 + 39,8 = 45,27 м.

Определим местные потери напора на суженном участке трубопровода по формуле (39):

$$h_{м_1} = \xi_1 \frac{\upsilon_1^2}{2g} = 0{,}375 \frac{0{,}64^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}0078 \text{ м},$$

где **ξ_1** – коэффициент местного сопротивления, определяем по (прил. 3, схема б) внезапное сужение:

$$\xi_1 = 0{,}5\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] = 0{,}5\left[1 - \left(\frac{100}{200}\right)^2\right] = 0{,}375 .$$

Определим местные потери напора при плавном повороте трубопровода:

$$h_{м_2} = \xi_2 \frac{\upsilon_2^2}{2g} = 0{,}21 \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}069 \text{ м},$$

где **ξ_2** – коэффициент местного сопротивления, определяем по (прил. 3), при плавном повороте $\frac{d}{R} = 0{,}4; \quad \xi = 0{,}21$.

Определим местные потери напора при крутом повороте трубопровода:

$$h_{м_3} = \xi_3 \frac{\upsilon_2^2}{2g} = 0{,}16 \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}053 \text{ м},$$

Определим суммарные местные потери напора:

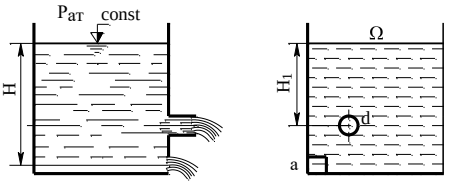
$h_м$ = $h_{м_1}$ + $h_{м_2}$ + $h_{м_3}$ = 0,0078 + 0,069 += 0,053 = 0,13 м.

Определим общие потери напора:

h_w = $h_{тр}$ + $h_м$ = 45,27 + 0,13 = 45,4 м.

Ответ: **h_w = 45,4 м.**

Задача 6. В боковой стенке резервуара больших размеров сделаны круглое отверстие диаметром **d_o = 2,5 см** к которому присоединен внешний цилиндрический насадок и квадратное отверстие со стороной **а = 4 см** (рис. 22). Определить суммарный расход **Q л/сек** из резервуара и скорость истечения воды из



план боковой стенки

Рис. 22

отверстий. Напор над центром отверстия **H = 2,5 м**, над центром насадка **H_1 = 1,5 м**. Истечение через насадок происходит при несовершенном сжатии, отношение площади отверстия **S** к площади сечения резервуара равно $S/\Omega = 0{,}2$.

Решение

Определим скорость истечения воды из внешнего цилиндрического насадка по формуле (51):

$$v_н = \varphi_н\sqrt{2gH_1} = 0{,}82\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5} = 4{,}4 \text{ м/сек},$$

где **$\varphi_н$** – коэффициент скорости, принимаем по прил. 4, для внешнего цилиндрического насадка **$\varphi_н$ = 0,82**.

Определим расход воды, вытекающий через насадок по формуле (53):

$$Q_н = \mu_{н_1} S\sqrt{2gH_1} = 0{,}85\cdot 0{,}49\cdot 10^{-3}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5} =$$

$$= 2{,}25\cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{сек} = 2{,}25 \text{ л/сек},$$

где **S** – площадь сечения выходного отверстия:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14\cdot(2{,}5\cdot 10^{-2})^2}{4} = 0{,}49\cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$\mu_{н1}$ – коэффициент расхода. При несовершенном сжатии коэффициент расхода определяем по формуле (42):

$$\mu_{н1} = \mu_н (1 + \delta) = 0{,}82 \cdot (1+0{,}034) = 0{,}85,$$

где **$\mu_н$** – коэффициент расхода при совершенном сжатии, принимаем по прил. 4, для внешнего цилиндрического насадка **$\mu_н$ = 0,82**;

δ_1 – поправочный коэффициент, принимаем по табл. 2, для отношения $\frac{S}{\Omega} = 0{,}2$, **δ_1 = 0,034**.

Определим скорость истечения воды из отверстия по формуле (40):

$$v_o = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2{,}5} = 6{,}8 \text{ м/с},$$

где **φ** – коэффициент скорости, определяем по прил. 4, для отверстия с острой кромкой **φ = 0,97**.

Определим расход воды, вытекающий через отверстие по формуле (41):

$$Q_o = \mu_1 S\sqrt{2gH} = 0{,}66\cdot 1{,}6\cdot 10^{-3}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2{,}5} =$$

$$= 7{,}39\cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{сек} = 7{,}39 \text{ л/сек},$$

где **S** – площадь сечения отверстия **$S = a^2 = 0.04^2 = 1.6\cdot 10^{-3}$ м^2;**

μ_1 – коэффициент расхода. Так как отверстие размещено в углу резервуара (см. рис. 22), то происходит не полное сжатие струи. В этом случае коэффициент расхода определяем по формуле (45):

$$\mu_1 = \mu\left(1 + 0{,}128\frac{P_1}{P}\right) = 0{,}62\left(1 + 0{,}128\frac{8}{16}\right) = 0{,}66,$$

где **μ** – коэффициент расхода при полном сжатии, определяем по прил. 4, для отверстия **μ = 0,62**.

Определяем суммарный расход воды вытекающей из резервуара:

$Q = Q_o + Q_н$ = 7,39 + 2,25 = 9,64 л/сек.

Ответ: **v_o = 6,8 м/сек, $v_н$ = 4,4 м/сек, Q = 9,644 л/сек**.

ПРИМЕЧАНИЯ

Задачи (1-10). Жидкость **Ж** подается по напорному трубопроводу диаметром **d**, весовой расход жидкости равен **G**. Определить режим течения жидкости, и какой объемный расход **Q** необходимо пропускать по трубопроводу, чтобы изменить режим течения.

Решить эту задачу для открытого лотка прямоугольного сечения, заполненного жидкостью высотой **h = 80 мм**, ширина лотка ***в* = 120 мм**. Числовые данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Числовые данные к задачам (1-10)

Величины	номера задач									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	156	150	140	120	125	100	130	135	115	107
$G \cdot 10^{-6}$, Н/час	2,0	1,8	1,6	1,3	1,2	1,9	1,5	2,1	1,7	1,4
Ж	нефть легка	масло ТП 22	нефть тяжел	дизельное топли	керосин Т-1	вода пресная	масло МС 14	мазут М 12	масло АС 14	масло АМГ 10

Задачи (11-20). Определить режим течения жидкости **Ж** по напорному и безнапорному (заполненному на половину) трубопроводу, имеющему внутренний диаметр **d,** при объемном расходе **Q**. Определить также скорость течения жидкости, при которой произойдет смена режимов течения. Числовые данные приведены в табл. 4.

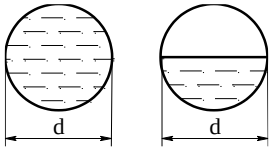


Рис. 23

Таблица 4

Числовые данные к задачам (11-20)

Величины	№ задачи									
	11	12	13	14	15	16	17	18	9	20
d, мм	200	225	250	275	300	125	150	175	200	225
Q, $м^3$/сек	0,22	0,24	0,26	0,32	0,3	0,245	0,26	0,28	0,3	0,32
Ж	бензин	масло ТП22	нефть тяжел	ьное топли	керосин Т-1	вода пресн	масло МС14	мазут М-12	масло АС-14	масло АМГ-10

Задачи (21-30). Объемный расход жидкости **Ж** текущей по лотку прямоугольного сечения с основанием **а** и высотой **h** равен **Q**. Определить режим течения жидкости для напорного и безнапорного (заполненного на **К** части его высоты) лотка. Какой расход необходимо пропускать по лотку, чтобы изменить режим течения жидкости? Числовые данные приведены в табл. 5.

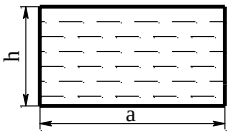


Рис. 24

Таблица 5

Числовые данные к задачам (21-30)

Величины	№ задачи									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
а, мм	170	165	130	145	150	170	160	175	165	180
К	0,6	0,4	0,25	0,3	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,8

h, мм	140	125	100	110	100	125	130	150	120	115
$Q \cdot 10^3$, $м^3/с$	3,0	3,5	3,2	3,6	3,0	3,2	2,8	3,1	3,8	4,0
Ж	бензин	вода пресная	дизельное топливо	керосин Т-1	мазут М-12	масло МС-14	масло АС-14	масло И-12А	масло АМГ-10	нефть легкая

Задачи (31-40). Весовой расход жидкости **Ж** составляет **G.** Материал трубопровода **М**, внутренний диаметр **d**, длина ***ℓ.*** Трубопровод имеет два плавных поворота **d/R** и один крутой на угол **α.** Отметка трубопровода в конечной точке на Z_2 метров выше начальной, давление вначале трубопровода равно P_1. Определить пьезометрический уклон $i_п$ и полный напор в конце трубопровода. Числовые данные приведены в табл. 6.

Таблица 6

Числовые данные к задачам (31-40)

Величины	№ задачи									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$G \cdot 10^{-6}$, Н/час	0,50	0,60	0,55	0,42	0,53	0,44	0,62	0,48	0,46	0,52
d, мм	156	142	150	125	130	135	147	155	160	162
ℓ, м	2000	1900	1800	1700	2200	2100	2400	2500	2300	2600
$P_1 \cdot 10^{-5}$, Па	4,2	4,0	3,8	3,6	4,4	3,9	4,1	4,7	4,5	4,8
Z_2	3,0	3,4	4,0	4,5	3,8	2,8	4,8	3,5	4,2	3,6
d/R_1	0,2	0,4	0,8	0,2	0,6	0,8	0,4	0,6	0,4	0,2
d/R_2	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,2	0,8	0,6
α, °С	20	30	45	30	20	45	60	45	20	30
Ж	масло ДС-11	мазут М-12	нефть легкая	вода пресная	керосин Т-1	масло МС-14	масло МК-22	дизельное топливо	нефть тяжелая	масло И12-А
М	стальной старый	новый холоднотянутый	стальной новый	сварной из нержавеющей стали	чугунный старый	чугунный старый	оцинкованный	чугунный новый	чугунный старый	чугунный новый

Задачи (41-50). Определить общие потери напора h_w в трубопроводе **Т** общей длиной **L = 4 км**, если по нему течет жидкость **Ж** с объемным расходом **Q**. Трубопровод имеет диаметр **D** длиной ***ℓ,*** одно внезапное сужение до диаметра **d** и два поворота, один плавный отношением **d/R** и другой крутой на угол α. Числовые данные приведены в табл. 7.

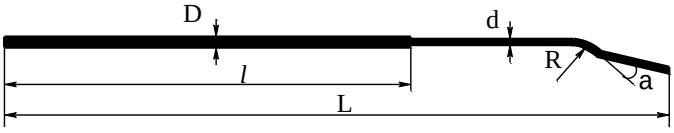


Рис. 25

Таблица 7

Числовые данные к задачам (41-50)

Велич	№ задачи

ины	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D, мм	250	200	225	250	100	150	175	200	225	250
ℓ. км	1,5	1,8	2,1	2,5	2,7	1,9	1,8	2	2,2	2,4
Q, л/сек	22	24	26	16	18	20	22	20	24	26
d, мм	200	100	200	225	80	100	150	150	200	225
α, °С	30	45	30	20	30	60	45	20	30	45

Продолжение табл. 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d/R	0,4	0,8	0,6	0,2	0,6	0,4	0,8	0,2	0,6	0,8
Ж	нефть тяжел	мазут М-12	нефть легка	ное топли	керос ин Т-1	масло МС-14	масло МК-22	вода пресн	масло ДС-11	масло И12-А
Т	чугунный старый	новый холоднот	стальной новый	чугунный новый	стальной старый	чугунный старый	оцинкова нный	из нержаве	чугунный старый	чугунный новый

Задачи (51-60). Определить геометрический уклон $i_г$ и давление жидкости в начале линии P_1, если потребителю подается жидкость **Ж** в количестве **Q**. Длина трубопровода **ℓ**, внутренний диаметр **d**, материал трубопровода **М**, давление жидкости в конце линии P_2. Отметка оси трубопровода в начальной точке на Z_1 метров выше конечной. Трубопровод имеет два крутых поворота на угол α и один плавный **d/R**. Числовые данные приведены в табл. 8.

Таблица 8

Числовые данные к задачам (51-60)

Велич ины	№ задачи									
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Q, м³/час	220	240	225	235	230	215	245	220	250	255
ℓ, км	1,00	1,20	1,40	1,25	1,35	1,30	1,25	1,65	1,55	1,50
d, м	0,207	0,255	0,245	0,200	0,260	0,260	0,250	0,215	0,240	0255
$P_2 \cdot 10^{-5}$, Па	1,55	1,65	2,15	2,00	1,75	2,45	1,85	1,95	2,10	2,15
Z_1, м	2,0	2,5	2,4	2,8	2,7	2,1	2,9	3,0	3,2	3,4
α_1, °С	20	60	45	30	20	60	30	20	30	20
α_2, °С	30	45	20	60	45	45	45	60	45	30
d/R	0,6	0,2	0,4	0,8	0,2	0,6	0,4	0,2	0,8	0,4
Ж	бензи н	вода пресн ая	ное топли	керос ин Т-1	мазут М-12	масло МС-14	масло АС-14	масло И-12А	масло АМГ-10	нефть легка
М	чугунный старый	новый холоднот	стальной новый	чугунный новый	стальной старый	чугунный старый	оцинкова нный	из нержаве	чугунный старый	чугунный новый

Задачи (61-70) Определить суммарный объемный расход воды **Q** из резервуара (рис. 26), имеющего квадратное отверстие со стороной **a** и круглое отверстие диаметром **d**, к которому присоединен конический расходящийся насадок. Сжатие струи в круглом отверстие считать несовершенном, отметку дна принять равной **0,00**. Отметки центра насадка $\mathbf{h_2}$, центра отверстия $\mathbf{h_1}$ и уровня воды в резервуаре **h**. Числовые данные приведены в табл. 9.

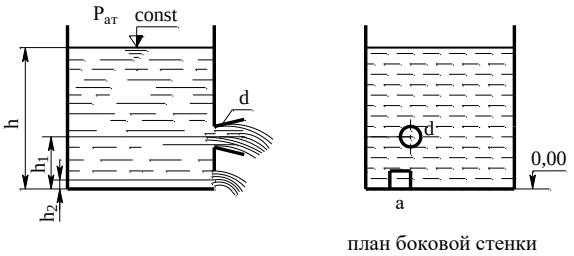


Рис. 26

Таблица 9

Числовые данные к задачам в (61–70)

Величины	номера задач									
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
a, см	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	7,6	6,6	5,6	4,6	4,0
d, см	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	7,5	7,0	6,5	6,0
h, м	3,20	3,30	3,40	3,50	3,60	3,70	3,80	3,90	4,00	4,10
h_1, м	2,0	2,10	2,15	2,20	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45	2,50
h_2, м	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,038	0,033	0,028	0,023	0,02

Задачи (71-80). В боковой стенке резервуара (рис. 27) сделаны квадратное отверстие со стороной **a** и круглое отверстие диаметром **d** к которому присоединен конический сходящийся насадок. Отметки центра насадка $\mathbf{h_1}$, центра отверстия $\mathbf{h_2}$ и уровня воды в резервуаре **h** приведены в табл. 10. Отметку дна принять равной **0,00**. Сжатие струи в круглом отверстии считать несовершенным. Определить суммарный объемный расход воды **Q** из резервуара. Числовые данные приведены в табл. 10.

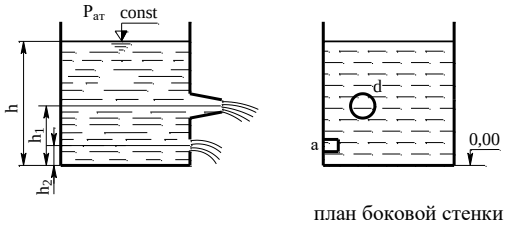


Рис. 27

Таблица 10

Числовые данные к задачам (71-80)

Величины	номера задач									
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
a, см	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	6,0	4,5	6,0
d, см	6,0	5,5	5,0	7,0	7,5	6,0	4,0	5,5	7,0	5,0
h, м	2,50	2,60	2,70	2,80	2,85	3,00	2,90	3,10	2,75	3,05
h_1, м	1,90	1,95	2,00	1,80	1,60	1,50	1,60	1,55	1,30	1,45
h_2, м	1,10	1,05	1,15	1,00	0,85	0,95	1,10	0,80	0,75	0,65

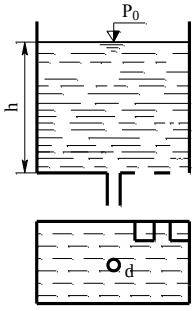


Рис. 28. План дна

Задачи (81-90) В дне бака расположены три отверстия. Два квадратных со стороной **a.** Одно отверстие примыкает стороной к боковой стенке, другое расположено в углу дна. Третье отверстие круглое диаметром **d**, расположено в центре дна и к нему присоединен насадок **H** (рис. 28). Глубина воды в баке **h**. Определить: 1) суммарный массовый расход $\mathbf{M_1}$ из

отверстий и насадка, если давление на поверхности воды атмосферное $\mathbf{P_0 = P_{атм}}$; 2) суммарный массовый расход $\mathbf{M_2}$, если давление на поверхности воды $\mathbf{P_0 = P}$. Числовые данные приведены в табл. 11.

Таблица 11

Числовые данные к задачам (81-90)

Величины	номера задач									
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
a, см	3,0	4,0	3,8	4,2	4,3	3,7	4,4	4,0	3,8	3,9
d, см	4,0	5,0	4,5	5,2	4,7	4,2	4,8	5,3	4,0	4,7
h, м	1,20	1,85	1,90	2,00	1,95	1,60	2,10	1,65	1,75	2,00
$P\cdot10^{-5}$, Па	1,8	1,4	1,6	1,3	1,5	1,7	1,9	1,5	1,65	1,75
H, насадок	внешний цилиндрический			конический сходящийся			конический расходящийся			

Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1 по теме Численные методы решения уравнений математической физики

1. Полуограниченная струна, закрепленная на конце, возбуждена начальным отклонением:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \to 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0,t) = 0, \to t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \to\to\to 0 \leq x \leq c \\ \dfrac{h}{c}(x-c), \to c \leq x \leq 2c \\ -\dfrac{h}{c}(x-3c), \to 2c \leq x \leq 3c \\ 0, \to\to\to x \geq 3c \end{cases}$$

Начертить положение струны для моментов $t = \dfrac{c}{a}$, если $a = 1$, $c = 1$, $h = 2$.

2. В системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \gamma \dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad 0<x<1$$

подобрать параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, \lambda$ так, что бы система стала гиперболической и что бы краевая задача допускала корректную постановку:

а) двух краевых условия на левой границе при *x=0*,

б) трех краевых условий на правой границе при *x=1*,

Контрольная работа №2 по теме Численные методы решения задач гидродинамики.

вариант №1
Задана квазилинейная система уравнений: **Мелкой воды**, описывающая неустановившееся течение в тонком слое (пленке) жидкости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial hu}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \dfrac{1}{2}gh^2) = -gh\dfrac{\partial b}{\partial x} \end{cases}$$

h - толщина слоя жидкости (h=h(t,x));
u – скорость жидкости (u=u(t,x));
b – профиль дна (b=b(x));
g – ускорение свободного падения;

Область решения задачи: $0 \le x \le l$; $0 \le t \le T$; $l = 1.0$; $T = 1.0$
Начальные условия: $h(0,x) = \varphi(x)$; $u(0,x) = \psi(x)$;
Краевые условия : а) $u(t,0) = f(t)$; $u(t,l) = s(t)$;
б) $u_x(t,0) = f(t)$; $h_x(t,l) = s(t)$;
в) $u(t,0) = f(t)$; $h_x(t,l) = s(t)$;

1. Провести характеристический анализ. Определить тип уравнения. Получить характеристическую систему уравнений.
2. Реализовать алгоритм и программу решения задачи сеточно-характеристическим методом.
3. Реализовать алгоритм и программу решения задачи методом Годунова.
4. Реализовать алгоритм и программу решения задачи методом крупных частиц.
5. Провести вычислительные эксперименты для двух задач:

"Прорыв плотины" н.у. $\varphi(x) = \begin{cases} 2.0\cdots, x \le 0.5 \\ 1.0\cdots, x \ge 0.5 \end{cases}$; $\psi(x) = 0$;
к.у. в) $f(t) = 0$; $s(t) = 0$;

"Буря с стакане" н.у. $\varphi(x) = \begin{cases} 1.0\cdots, x \le 0.45 \\ 2.0\cdots, 0.45 \le x \le 0.55 \\ 1.0\cdots, x \ge 0.55 \end{cases}$; $\psi(x) = 0$;
к.у. а) $f(t) = 0$; $s(t) = 0$;

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на каждом практическом занятии.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается выполнением практико-ориентированных заданий и заданий контрольных работ.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено». Систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний обучающихся.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели:**

1) знание основных понятий и определений;
2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
3) оптимальность хода решения;
4) логика изложения, рассуждений;
5) правильность выполнения расчетов.

Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации:

Зачтено: выполнение практико-ориентированных заданий соответствует перечисленным показателям, обучающийся демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками. Контрольная работа считается успешно выполненной, если. более половины заданий контрольной работы выполнены верно.

Незачтено: Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие. Половина или более половины заданий контрольной работы выполнены не верно.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примерный перечень вопросов к зачету:

1. Предмет и методы гидрогазодинамики (механики жидкостей и газов). Основные термины и определения.
2. Схемы сплошной среды и понятия «жидкая частица»; вязкость капельных жидкостей и газов, идеальная (лишенная вязкости) и реальная жидкость, ньютоновская и неньютоновская жидкости.
3. Поверхностное натяжение; кипение жидкостей, кавитация.
4. Силы, действующие в жидкости, находящейся в статическом положении. Гидростатическое давление. Основная формула гидростатики.
5. Понятие о напоре: гидростатический и пьезометрический напоры. Равновесие жидкостей в сообщающихся сосудах. Методы и приборы для измерения давления.
6. Закон Архимеда. Плавание тел.
7. Режимы движения жидкости (ламинарный, турбулентный, переходный). Местная скорость движения жидкости. Поле скоростей движения жидкости. Линии тока. Расход жидкости.
8. Вихревое движение. Циркуляция скорости
9. Уравнения движения применительно к произвольному объему потока вязкой сжимаемой жидкости (дифференциальные уравнения Навье-Стокса).
10. Дифференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости (уравнения Эйлера).
11. Уравнение Бернулли для идеальной и вязкой жидкости.
12. Уравнения турбулентного движения жидкости (уравнения Рейнольдса). Основные гипотезы о переносе энергии турбулентности в вязких потоках жидкости.

Тестовые задания

Задания закрытого типа - средний уровень сложности

Test1

Жидкость в заданном объёме называется несжимаемой, если

Ответы

1. $div\,\overline{v} = 0$
2. $div\,\overline{v} \neq 0$
3. $rot\,\overline{v} = 0$
4. $rot\,\overline{v} \neq 0$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test2

Течение жидкости в заданном объёме называется безвихревым, если

Ответы

1. $div\,\overline{v} = 0$
2. $div\,\overline{v} \neq 0$
3. $rot\,\overline{v} = 0$
4. $rot\,\overline{v} \neq 0$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test3

Уравнение неразрывности течения жидкости имеет вид

Ответы

1. $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\,\rho = 0$
2. $\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{v}}{dt} + div\,\rho = 0$
3. $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\,\overline{v} = 0$
4. $\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{v}}{dt} + div\,\overline{v} = 0$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test4

Источник или сток течения жидкости задаётся потенциалом

Ответы

1. $w = e^{-i\omega z}$
2. $w = \ln(-i\omega z)$
3. $w = e^{z}$
4. $w = \ln z$

Критерии оценивания: два правильных ответа – 2 б., один правильный ответ – 1 б., нет правильных ответов – 0 б.

Test5

Диполь течения жидкости задаётся потенциалом

Ответы

1. $w = z$
2. $w = \frac{1}{z}$
3. $w = \frac{2}{z}$
4. $w = z^2$

Критерии оценивания: два правильных ответа – 2 б., один правильный ответ – 1 б., нет правильных ответов – 0 б.

Test6

Что такое линия тока?

Ответы

1. Это кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор поля скоростей является нормальным.
2. Это кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор поля скоростей является бинормальным.
3. Это кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор поля скоростей является касательным.
4. Это кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор поля скоростей является базисным.

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test7

При плоском потенциальном движении линии тока и изопотенциальные линии

Ответы

1. Сонаправлены
2. Ортогональны
3. Произвольно направлены
4. Совпадают

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test8

Однородный поступательный поток описывается потенциалом

Ответы

1. $w = az, a > 0$
2. $w = \frac{1}{z}$
3. $w = \frac{1}{z+a}$
4. $w = az^2, a > 0$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test9

Сечение сосуда, используемого для водяных часов задаётся уравнением

Ответы

1. $y = ch\,(ax)$
2. $y = ax^2$

3. $y = ax^3$
4. $y = ax^4$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test10
Укажите формулу Торричелли
Ответы
1. $v = \sqrt{2gh}$
2. $v = 2gh$
3. $v = 2g\sqrt{h}$
4. $v = 2gh^2$

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Задания открытого типа (короткий ответ)

Test11
Кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор поля скоростей является … называется линией тока.
Ответ: касательным
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test12
При плоском потенциальном движении линии тока и изопотенциальные линии … друг другу.
Ответ: ортогональны
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test13
Теорема Томсона. Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, потенциально движущейся в односвязанном объеме с заданным значением скорости на границе, … , чем кинетическая энергия этой же жидкости, совершающей непотенциальное движение в таком же объеме с тем же значением скорости на границе.

Ответ: меньше

Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test14
Жидкость называется вязкой, если при её течении имеются силы внутреннего … .
Ответ: трения
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test15
Жидкость называется изотропной, если её физические свойства … по всем направлениям.
Ответ: одинаковы
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test16

Жидкость называется идеальной, если при её течении отсутствуют силы внутреннего … .
Ответ: трения
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test17
Из принципа максимума гармонической функции следует, что при … движении несжимаемой жидкости в односвязной области скорость не может принимать максимальное значение внутри области.
Ответ: потенциальном
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test18
Течение жидкости в заданном объёме называется безвихревым, если
… равен нулю.
Ответ: ротор
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test19
Жидкость в заданном объёме называется несжимаемой, если
… равна нулю.
Ответ: дивергенция
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Test20
Движение жидкости называется потенциальным, если существует скалярная функция, … которой равен вектору скорости в любой точке.
Ответ: градиент
Критерии оценивания: правильный ответ – 1 б., неправильный ответ – 0 б.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация по дисциплине преследует цель оценить работу обучающихся за курс, полученные обучающимися знания, умения и уровень приобретенных компетенций, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач.

Зачет проводится в форме собеседования с преподавателем. Обучающийся получает теоретический вопрос на знание понятий и определений, формулировок утверждений и тестовое задание. Если в ходе текущего контроля в течение семестра обучающийся не выполнял контрольные задания или получал оценку «незачтено», то ему предоставляются дополнительные расчетные практико-ориентированные задания на усмотрение преподавателя. По результатам ответа выставляется оценка по дихотамической шкале: «зачтено», «незачтено»

Время подготовки к ответу не должно превышать одного астрономического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

При проведении промежуточной аттестации в форме зачета используются следующие **показатели:**

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом данной предметной области;
2) логика изложения
3) корректность формулировок утверждений и теорем;
4) умение связывать теорию с практикой;
5) умение иллюстрировать ответ примерами.

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Уровень сформирован-ности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области, корректно формулирует утверждения, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания для решения практических задач. Дано не менее, 60% верных ответов на тестовые вопросы	Повышенный уровень	Зачтено
Ответ обучающегося не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но студент дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Дано не менее, 60% верных ответов на тестовые вопросы	Базовый уровень	
Ответ обучающегося не соответствует любым двум(трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представлении понятий комплексного анализа, допускает существенные ошибки в решении задач. Дано не менее, 60% верных ответов на тестовые вопросы	Пороговый уровень	
Ответ обучающегося не соответствует любым четырем и более из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки, не умеет решать задачи. Дано более 60% не верных ответов на тестовые вопросы.	–	Незачтено